UNIVERSITE CADI AYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

ANNEE UNIVERSITAIRE 2013/2014

SMP / S4

MÉCANIQUE QUANTIQUE
Exercices complémentaires de la Série 4

Exercice 1. Evolution dans le temps d'une observable

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée { $|u_1>$, $|u_2>$, $|u_3>$}. Le hamiltonien H du système est donné par :

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left(L_x^2 - L_y^2\right)$$

où ω est une constante réelle positive, L_x et L_y sont des opérateurs définis par :

$L_x\ |u_1> = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ |u_2>$; $L_x\ |u_2> = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ (|u_1> + |u_3>)$; $L_x\ |u_3> = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ |u_2>$

$L_y\ |u_1> = i\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ |u_2>$; $L_y\ |u_2> = -\ i\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ (|u_1> - |u_3>)$; $L_y\ |u_3> = -\ i\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\ |u_2>$

1) a) Ecrire les matrices associées aux opérateurs L_x et L_y dans la base {$|u_k>$}; k=1,2, 3. Vérifier que ces opérateurs sont hermitiques.

b) En déduire que l'opérateur H est défini, sur la base {$|u_k>$}, par :

$$H\ |u_1> = \hbar\omega\ |u_3> \qquad H\ |u_2> = 0 \qquad H\ |u_3> = \hbar\omega\ |u_1>$$

c) Déterminer les valeurs propres (énergies E_k) et les états propres normés $|\Phi_k>$ du système (on supprimera tout facteur de phase n'ayant pas de sens physique).

2) On considère maintenant l'opérateur L_z représenté, dans la base {$|u_k>$}, par la matrice :

$$L_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que L_z est une observable.

b) On suppose qu'à l'instant t=0, le système est dans l'état $|\Psi_{t=0}> = |u_1>$ et on mesure à cet instant la grandeur $\mathcal{L}_z$ représentée par L_z. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités?

c) Quel est le ket $|\Psi_t>$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieur? $|\Psi_t>$ et $|\Psi_{t=0}>$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables? Justifier votre réponse.

d) Exprimer $|\Psi_t>$ en fonction des kets $|u_k>$ et calculer, à l'instant t, les probabilités des différents résultats de mesure de $\mathcal{L}_z$. Tracer ces probabilités dans l'intervalle [t=0, t=π/ω]; commenter.

3) Calculer les valeurs moyennes $<\mathcal{L}_x>_t$, $<\mathcal{L}_y>_t$ et $<\mathcal{L}_z>_t$. Quel est le mouvement effectué par le vecteur $<\vec{\mathcal{L}}>_t$?

Exercice 2. Système conservatif

On considère un système conservatif de masse m dont l'état quantique, à l'instant t=0, est décrit par le ket :

$$|\Psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{2}|\Phi_0\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}}|\Phi_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\Phi_2\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}|\Phi_3\rangle$$

les kets $|\Phi_n\rangle$ sont des états propres de l'hamiltonien H du système associés aux valeurs propres E_n (donnant les énergies possibles du système) et telle que :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{avec n entier positif ou nul}$$

1) Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_{t=0}$, lorsqu'on mesure l'énergie du système dans $|\Psi_{t=0}\rangle$, de trouver la valeur $5\hbar\omega/2$?

2) Quelle est la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie du système dans l'état $|\Psi_{t=0}\rangle$.

3) a) Calculer le vecteur d'état $|\Psi_t\rangle$ à l'instant t.

b) Que deviennent à l'instant t la probabilité, la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie calculés précédemment? Commenter.

4) On suppose que le résultat d'une mesure de l'énergie donne $7\hbar\omega/2$. Quel est l'état du système immédiatement après la mesure? Que trouve-t-on si on mesure à nouveau l'énergie? et avec quelle probabilité?

Exercice 3. Evolution de la position et de l'impulsion d'un système

On reprend l'exercice **IV** du complément de la série 3 et se place dans le cas particulier : k=2 (oscillateur harmonique) et on suppose que l'état de la particule est décrit à un instant t donné, par un ket $|\Psi_t\rangle$ quelconque.

1) En utilisant un résultat du cours que l'on précisera, relier

$$\frac{d\langle x\rangle_t}{dt} \text{ à } \langle p_x\rangle_t \qquad \text{et} \qquad \frac{d\langle p_x\rangle_t}{dt} \text{ à } \langle x\rangle_t$$

2) En déduire $\frac{d^2\langle x\rangle_t}{dt^2}$ et $\frac{d^2\langle p_x\rangle_t}{dt^2}$

(On posera $2V_0/m = \omega^2$; ω étant une constante ayant les dimensions d'une pulsation).

3) Intégrer les équations obtenues pour avoir les lois de variation au cours du temps de $\langle x\rangle_t$ et $\langle p_x\rangle_t$, sachant qu'à l'instant t=0, l'état de la particule est décrit par un ket $|\Psi_{t=0}\rangle$ pour lequel : $\langle x\rangle_{t=0} = x_0$ et $\langle p_x\rangle_{t=0} = p_0$.

4) Que se passera-t-il si $|\Psi_{t=0}\rangle = |\varphi_n\rangle$?

Exercice 4. Particule dans un champ électromagnétique

On considère une particule de masse m et de charge q soumise à un champ électromagnétique $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{B}})$. En mécanique classique, la grandeur $\mathcal{H}$, fonction de Hamilton, associée à l'énergie de la particule s'écrit :

$$\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - q\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)\right]^2 + q\,\mathcal{U}(\vec{r},t)$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion et $\vec{r}$ la position de la particule. $\vec{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{U}$ sont les potentiels vecteur et scalaire dont dérivent $\vec{\mathcal{B}}$ et $\vec{\mathcal{E}}$ respectivement.

1) Ecrire l'observable H représentant la grandeur $\mathcal{H}$.

2) Ecrire l'équation de Schrödinger en représentation position